МЕХАНИКА

УДК 532

Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин

ДИНАМИКА ПАДАЮЩЕЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ. ЧАСТЬ 1

Показано, что формулу для коэффициента силы Жуковского – Магнуса можно использовать и при больших числах Рейнольдса, вплоть до значений 1000. Однако при значениях чисел Рейнольдса, больших 2000, результаты расчетов не соответствуют экспериментальным данным. В последнем случае рекомендована новая формула.

It is shown that the formula for coefficient of force of Zhukovsky-Magnus can be used and at large numbers of Reynolds up to values 1000. However at values of large numbers 2000 results of calculations do not correspond to experimental datas. In the latter case the new formula is recommended.

Ключевые слова: угловая скорость, число Рейнольдса, обтекание частицы.

Key words: angular speed, Reynolds number, particle flow.

Основные причины вращения частиц в потоке: их соударения между собой и со стенкой, градиент осредненной скорости среды, несовпадение центра тяжести с центром приложения аэродинамической силы [1—16]. Динамика вращающейся частицы описывается уравнениями

$$m\frac{d\vec{V}_{pC}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)},$$

$$\frac{d\vec{L}_{pC}}{dt} = \sum \vec{M}_{C}(\vec{F}^{(e)}),$$
(1)

где \vec{V}_{pC} – скорость центра масс частицы; \vec{L}_{pC} – кинетический момент частицы относительно ее центра масс; $\sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)})$ – главный момент приложенных внешних сил относительно центра масс. Векторную систему (1) можно заменить скалярными уравнениями. В важном частном случае плоскопараллельного движения остается три уравнения:

$$m\frac{dU_{p}}{dt} = \sum F_{x}^{(e)}, m\frac{dW_{p}}{dt} = \sum F_{z}^{(e)}, I_{Cy}\frac{d\Omega_{p}}{dt} = \sum M_{Cy}(\vec{F}^{(e)}),$$

где I_{Cy} — момент инерции частицы относительно оси, перпендикулярной основной плоскости (X - Z) и проходящей через центр масс частицы; для сферического, однородного тела $I_{Cy} = m\delta^2/10$; U_p , W_p — проекции \vec{V}_{vC} на оси X, Z.

© Великанов Н. Л., Наумов В. А., Корягин С. И., 2016 Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 85 – 95.

На вращающуюся твердую частицу в вязкой среде действует момент сопротивления, который обычно записывают в виде

$$M_{Cy} = 0.5 C_{\omega} \rho_f^o \left(\delta/2 \right)^{\circ} \left| \Omega_R \right| \Omega_R, \Omega_R = \Omega_f - \Omega_p.$$
⁽²⁾

В формуле (2) Ω_p , Ω_f — векторы угловой скорости частицы и окружающего ее элемента газа соответственно. При $\text{Re}_{\omega} \equiv |\Omega R| \delta^2 / \nu < 40$ коэффициент момента сопротивления равен [1] $C_M = 64\pi/\text{Re}_{\omega}$ (здесь наблюдается аналогия с законом Стокса). Для чисел Рейнольдса $\text{Re}_{\omega} = 80$ ÷4000 в [2] на основании численного решения задачи об обтекании частицы получена формула $C_{\omega} = 12, 6/\text{Re}_{\omega}^{1/2} + 128, 4/\text{Re}_{\omega}$, которая соответствует опытным данным и при значительно больших числах Re_{ω} .

При вращении твердого тела в вязкой среде на него действует поперечная (подъемная) сила, которую называют силой Жуковского — Магнуса и обычно выражают в виде [3]

$$\vec{F}_{M} = C_{M} \left(\delta / 2 \right)^{3} \rho_{f} \left[\vec{\Omega}_{R} \times \vec{V}_{R} \right], \quad \vec{\Omega}_{R} = \vec{\Omega}_{f} - \vec{\Omega}_{p}, \quad \vec{V}_{R} = \vec{V}_{f} - \vec{V}_{p}.$$
(3)

В формуле (3) $\vec{\Omega}_f$, $\vec{\Omega}_p$ — векторы угловой скорости частицы и окружающего ее элемента жидкости (газа) соответственно; \vec{V}_f , \vec{V}_p — векторы скорости центра масс частицы и окружающего ее элемента жидкости; δ — диаметр частицы; ρ_f — плотность жидкости.

Проекции силы Жуковского – Магнуса на оси координат:

$$F_{Mx} = C_M (\delta / 2)^3 \rho_f (\Omega_{Ry} W_R - \Omega_{Rz} V_R),$$

$$F_{My} = C_M (\delta / 2)^3 \rho_f (\Omega_{Rz} U_R - \Omega_{Ry} W_R),$$

$$F_{Mz} = C_M (\delta / 2)^3 \rho_f (\Omega_{Rx} V_R - \Omega_{Ry} U_R).$$

В неподвижной жидкости:

$$\begin{split} F_{Mx} &= C_M (\delta/2)^3 \rho_f (\Omega_{py} W_p - \Omega_{pz} V_p), \\ F_{My} &= C_M (\delta/2)^3 \rho_f (\Omega_{pz} U_p - \Omega_{py} W_p), \\ F_{Mz} &= C_M (\delta/2)^3 \rho_f (\Omega_{px} V_p - \Omega_{py} U_p). \end{split}$$

Значение коэффициента C_M при Re = $|\vec{V}_R|\delta/\nu = 1$, Re_{ω} = $|\vec{\Omega}_R|\delta^2\nu = 1$ (здесь ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости) нашли Рубинов и Келлер [4]: $C_M = C_M^o = \pi$. Для другого крайнего случая Re $\rightarrow \infty$, Re_{ω} $\rightarrow \infty$ в [5] приводится асимптотическое значение $C_M^\infty = 8\pi/3$. Однако многочисленные экспериментальные исследования [6–9] показали, что коэффициент C_M уменьшается с ростом чисел Рейнольдса.

На основе экспериментальных данных, полученных в [8] для $\operatorname{Re}_{\omega} = 2,5 \cdot 10^3 - 3,9 \cdot 10^4$, предложено в первом приближении при $100 \leq \leq \operatorname{Re}_{\omega} \leq 3,6 \cdot 10^4$ пренебречь зависимостью C_M (Re) и использовать в расчетах следующую формулу [10]:

$$\frac{C_M}{\pi} = \frac{6.05}{\text{Re}_{\omega}^{0.39}}.$$
(4)

Формулу (4) нельзя считать окончательной. В ходе дальнейших экспериментальных исследований выражение (4), несомненно, должно уточняться с целью получения зависимости $C_M = C_M(\text{Re}_{\omega}, \text{Re})$. Действительно, в [11] была предложена зависимость

$$\frac{C_{M}}{\pi} = \begin{cases} 1, \gamma, 0, 225, \\ \frac{0, 225}{\gamma} + \left(1 - \frac{0, 225}{\gamma}\right) \cdot \exp(-0, 075 \cdot \operatorname{Re}^{0,7} \cdot \gamma^{0,4}), \gamma > 0, 225, \end{cases}$$
(5)

где $\gamma = 0.5\delta \left| \vec{\Omega}_R \right| / \left| \vec{V}_R \right|$ — отношение модулей относительной окружной скорости на поверхности частицы и скорости ее центра масс. В [12] формула (5) преобразована так:

$$\frac{C_{M}}{\pi} = \begin{cases} 1, \frac{\text{Re}_{\omega}}{\text{Re}}, 0, 45, \\ 0, 45 \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\omega}} + \left(1 - 0, 45 \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\omega}}\right) \cdot \exp(-0, 0568 \cdot \text{Re}^{0,3} \cdot \text{Re}_{\omega}^{0,4}), \frac{\text{Re}_{\omega}}{\text{Re}} > 0, 45. \end{cases}$$
(6)

Выражение (5) и (6) можно использовать в диапазоне параметров экспериментальных исследований [11]: 10 < Re < 140, 5 < Re_{ω} < 420. Заметим, что в указанных условия диапазон отношений $\gamma = 0,5 \text{ Re}_{\omega}/\text{ Re}$ от 0,25 до 1,5.

В таблице представлено сравнение опытных данных [13] с результатами расчета по формуле (5). Видно, что качественно зависимость коэффициент C_M от числа Рейнольдса и величины γ одинаковая. Количественное различие может достигать 40%. Следовательно, числовые коэффициенты в формуле (5) нуждаются в уточнении, особенно в области больших чисел Рейнольдса.

Коэффициент силы Жуковского – Магнуса $C_{_M}/\pi$

γ	Источник	Re				
		0,5	8	17,1	34,2	68,4
1	Опыты [13]	1,00	0,601	0,498	0,402	0,363
	Формула (3) [11]	0,965	0,787	0,673	0,544	0,408
2	Опыты [13]	1,00	0,563	0,425	0,338	0,250
	Формула (3) [11]	0,948	0,693	0,544	0,387	0,245
3	Опыты [13]	1,00	0,533	0,375	0,267	0,201
	Формула (3) [11]	0,936	0,637	0,471	0,308	0,173
4	Опыты [13]	1,00	0,490	0,331	0,238	0,181
	Формула (3) [11]	0,927	0,595	0,420	0,257	0,133
5	Опыты [13]	1,00	0,455	0,305	0,225	0,160
	Формула (3) [11]	0,920	0,563	0,328	0,221	0,106

На рисунках 1—3 представлены результаты расчета зависимости коэффициента силы Жуковского — Магнуса от чисел Рейнольдса при различных значениях γ . В диапазоне $\text{Re}_{\omega} < 400$ коэффициент C_M заметно уменьшается с ростом γ , пока $\gamma < 1$ (рис. 1). А вот при $\gamma > 1$ зависимость $C_M(\gamma)$ становится несущественной (рис. 2).



Рис. 1. Зависимость коэффициента силы Магнуса от числа Рейнольдса Re_{ω} при различных значениях $\gamma < 1: 1 - \gamma = 0,3; 2 - \gamma = 0,4; 3 - \gamma = 0,6; 4 - \gamma = 1$



Рис. 2. Зависимость коэффициента силы Магнуса от числа Рейнольдса Re_{ω} при различных значениях $\gamma > 1: 1 - \gamma = 1,2; 2 - \gamma = 2,0; 3 - \gamma = 3,5; 4 - \gamma = 6$



Рис. 3. Зависимость коэффициента силы Магнуса от больших чисел Рейнольдса Re_ω при различных значениях γ: 1 – γ = 0,5; 2 – γ = 1; 3 – γ = 2; 4 – γ = 5. Точки получены после обработки результатов экспериментов [8]



Пусть сферическая частица, вращающаяся с угловой скоростью Ω_0 , находится на поверхности неподвижной жидкости. Причем $\vec{V}_p(0) = 0$, где вектор \vec{V}_p представляет собой скорость центра масс частицы. Ось Oz направим вертикально вниз, ось Ox — параллельно поверхности в сторону векторного произведения $\vec{\Omega}_0 \times \vec{g}$. Тогда вектор угловой скорости будет иметь проекцию только на ось Oy. При записи дифференциального уравнения движения центра масс частицы необходимо учесть силы тяжести и Архимеда, силу гидродинамического сопротивления, силу Жуковского — Магнуса и эффект присоединенных масс:

$$m\frac{dV_p}{dT} = \vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_\mu + \vec{F}_M + \vec{F}_m.$$

Проекции (7) на оси координат:

$$m\frac{dU_p}{dT} = -\frac{1}{8}C_R\pi\delta^2\rho_f U_p \left|\vec{V}_p\right| + C_M\rho_f \frac{\delta^3}{8}\Omega \cdot W_p - \frac{1}{2}m_f \frac{dU_p}{dT},$$
(8)

$$m\frac{dW_p}{dT} = mg(1-\lambda) - \frac{1}{8}C_R\pi\delta^2\rho_f W_p \left|\vec{V}_p\right| - C_M\rho_f \frac{\delta^3}{8}U_p\Omega - \frac{1}{2}m_f \frac{dW_p}{dT}.$$
 (9)

Уравнение кинетического момента дает проекцию только на ось Оу:

$$I_{C}\left(1+k\lambda\right)\frac{d\Omega}{dT} = -0.5C_{\omega}\rho_{f}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{5}\left|\Omega\right|\Omega.$$
(10)

где k — коэффициент присоединенных масс при вращательном движении; I_C — момент инерции частицы относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс частицы $I_C = am\delta^2$; для сферического однородного тела a = 0,1.

В качестве независимых характерных величин выбираем $L_* = H$, $\Omega_* = \Omega_0$, тогда характерная скорость будет $W_* = H\Omega_0$. Запишем систему уравнений (8) — (10) с начальными условиями в безразмерной форме:

$$\frac{du}{dt} = -KC_R(\text{Re})u\sqrt{u^2 + w^2} + \frac{C_M}{\pi}w\omega\frac{K}{\Lambda},$$
(11)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{Fr_{\omega}} - KC_R \left(\text{Re} \right) w \sqrt{u^2 + w^2} - \frac{C_M}{\pi} u \omega \frac{K}{\Lambda},$$
(12)

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \quad \frac{dz}{dt} = w(t), \tag{13}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -B_1 C_{\omega} |\omega| \omega, \quad B_1 = \frac{3\lambda}{32a(1+k\lambda)}, \quad (14)$$

$$x(0) = 0, \ z(0) = 0, \ u(0) = 0, \ w(0) = 0, \ \omega(0) = 1,$$
 (15)

где

$$K = \frac{3\lambda H}{4(1+\lambda/2)\delta}, \quad \Lambda = \frac{H}{\delta}, \quad Fr_{\omega} = \frac{(1+\lambda/2)\Omega_0^2 H}{g(1-\lambda)},$$

89

(7)

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad u = \frac{U_p}{\Omega_0 H}, \quad w = \frac{W_p}{\Omega_0 H}, \quad x = \frac{X}{H}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad t = T\Omega_0$$

При $\text{Re}_{\omega} > 1000$ влияние величины ү на коэффициент C_M заметно при любых значениях ү (см. рис. 3). Однако признать значения C_M , рассчитанные по формуле (5), достоверными нельзя, так как в опытах [11] число Рейнольдса Re_{ω} не превышало 420. Поэтому при $\text{Re}_{\omega} > 2000$ в расчетах пришлось использовать формулу (4), предложенную в [10], но с уточненными числовыми коэффициентами:

$$\frac{C_M}{\pi} = \frac{25.6}{\text{Re}_{0}^{0.485}}.$$
(16)

Уточнение числовых коэффициентов в формуле (4) связано с тем, что в [10] не учитывался взаимный эффект поступательного и вращательного движения по следующим формулам [14]:

$$C_{R}(\text{Re, Re}_{\omega}) = (1+0,043 \,\text{Re}_{\omega}^{0,3})C_{\omega}^{P}(\text{Re}),$$

$$C_{\omega}(\text{Re, Re}_{\omega}) = (1+0,0044 \,\text{Re}^{0,5})C_{\omega}^{o}(\text{Re}).$$

Стандартная кривая сопротивления *C*^{*o*}_{*R*} (Re) хорошо описывается зависимостью [15]:

$$C_R^o = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}} (1+0, 15 \,\text{Re}^{0,687}), \,\text{Re} < 1000, \\ 0, 44, \,1000, \,\text{Re} < 2 \cdot 10^5. \end{cases}$$

Числа Рейнольдса по безразмерным скоростям вычисляются так:

$$\operatorname{Re}_{\omega} = \operatorname{Re}_{0} |\omega|, \quad \operatorname{Re} = \operatorname{Re}_{0} \Lambda \sqrt{u^{2} + w^{2}}, \quad \operatorname{Re}_{0} = \frac{\Omega_{0} \delta^{2}}{v}.$$

Задача Коши (11)—(15) решалась численным методом в среде *MathCad* сначала для условий опытов [8]. На рисунках 4—8 представлены результаты расчетов.



Рис. 4. Траектории падающей вращающейся сферы при Ω₀ = 25,6 1/с:
 1 — расчет с использованием формулы (5); 2 — формулы (16);
 3 — экспериментальная точка [8] с указанием среднеквадратической ошибки

По рисунку 4 видно, что использование формулы (5) (или (4)) при столь больших числах Рейнольдса (линия 1 на рисунке 6 и рисунке 7)



приводит к существенно завышенной абсциссе осаждения по сравнению с экспериментальной точкой. При $\Omega_0 = 386.4 \, 1/c$ указанное расхождение еще больше. Поэтому далее при $\text{Re}_{\omega} > 1500$ в расчетах применялась формула (16).



 Рис. 5. Траектории падающей вращающейся сферы при двух значениях начальной угловой скорости:
 1 (точки) — Ω₀ = 25,6 1/с; 2 (сплошная линия) — Ω₀ = 386,4 1/с;
 3 — экспериментальные точки [8] с указанием среднеквадратической ошибки



 Рис. 6. Изменение по времени вертикальной координаты и скорости падающей вращающейся сферы в воздухе:
 1 (точки) — Ω₀ = 25,6 1/с; 2 (сплошная линия) — Ω₀ = 386,4 1/с



Рис. 7. Изменение по вертикальной координате чисел Рейнольдса Re_{ω} падающей вращающейся сферы: 1 (точки) — $\Omega_0 = 25,6$ 1/с; 2 (сплошная линия) — $\Omega_0 = 386,4$ 1/с



Рис. 8. Изменение по вертикальной координате чисел
 Рейнольдса Re падающей вращающейся сферы:
 1 (точки) — Ω₀ = 25,6 1/с; 2 (сплошная линия) — Ω₀ = 386,4 1/с

По рисункам 5—6 видно, что результаты расчетов с использованием формулы (16) хорошо согласуются с опытными данными, представленными в [8], как по координате, так и по времени осаждения. При угловой скорости до значений $\text{Re}_{\omega} = 1000$ аналогичный результат получается и при использовании формулы (4).

Согласно рисунку 7 в первом случае величина Re_{\u03c0} мало изменяется вблизи 2500, а во втором случае — от 40 тысяч уменьшается до 32 тысяч. В обоих случаях изменение числа Рейнольдса Re практически одинаково: от нуля примерно до 14000 (см. рис. 8).

Таким образом, установлено, что формулу (4) для коэффициента силы Жуковского — Магнуса можно использовать и при больших, чем у авторов [11], числах Рейнольдса, вплоть до значений Re_o = 1000.

Однако при значениях чисел Рейнольдса Re_ω > 2000 результаты расчетов не соответствуют экспериментальным данным. В последнем случае рекомендуется применять формулу (16). Несомненно, необходимы экспериментальные исследования зависимости указанного коэффициента от значений Re при больших числах Рейнольдса.

На рисунках 9—16 представлены результаты численного исследования влияния критериев подобия на результаты расчетов с использованием усовершенствованной модели.



Рис. 9. Траектории падающих вращающихся частиц при $\Lambda=20;\,\lambda=0,2;\,Fr_{\omega}=100$ и различных значениях Re_0 : $1\,-\,Re_0=100;\,2\,-\,Re_0=150;\,3\,-\,Re_0=250;\,4\,-\,Re_0=450$



Рис. 12. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по высоте при различных значениях Re₀:





Рис. 13. Изменение безразмерной горизонтальной скорости частиц по высоте при различных значениях Re₀: 1 — Re₀ = 100; 2 — Re₀ = 150; 3 — Re₀ = 250; 4 — Re₀ = 450



Рис. 14. Изменение безразмерной угловой скорости частиц по высоте при различных значениях Re₀: 1 — Re₀ = 100; 2 — Re₀ = 150; 3 — Re₀ = 250; 4 — Re₀ = 450



Рис. 15. Изменение чисел Рейнольдса частиц Re_{ω} по высоте при различных значениях Re_0 : $1 - Re_0 = 100; 2 - Re_0 = 150; 3 - Re_0 = 250; 4 - Re_0 = 450$





Список литературы

1. *Vasseur P., Cox R.G.* The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid // J. Fluid Mech. 1977. Vol. 80, N 3. P. 561 – 591.

2. *Dennis S.C., Singh S.N., Ingham D.B.* The steady flow due to rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers // Ibid. 1980. Vol. 101. P. 257 – 279.

3. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. Turbulent flows in gas suspensions. N.Y., 1990.

4. *Rubinow S.I., Keller J.B.* The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 11. P. 447–459.



5. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.

6. *Barkla H.M., Auchterlonie L.J.* The Magnus or Robins effect on rotating spheres // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 47. P. 437–447.

7. *Tsuji Y., Morikawa Y., Mizuno O.* Experimental measurement of the Magnus force on a rotating sphere at low Reynolds numbers // J. Fluids Engin. 1985. Vol. 107, №4. P. 484–488.

8. *Naumov V.A., Solomenko A.D., Yatsenko V.P.* Influence of the Magnus force on the motion of a spherical solid with a large angular velocity // J. Engin. Phys. and Thermophys. 1993. Vol. 65, № 3. P. 852–855.

9. Наумов В.А. Динамика вращающихся сферических частиц, падающих в неподвижной жидкости // Вестник науки и образования Северо-Запада России : электронный журнал, 2016. Т. 2, № 1. URL: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2015/01/2016-№1-Наумов.pdf (дата обращения: 18.03.2016).

10. Яценко В.П., Наумов В.А., Соломенко А.Д. О коэффициенте в формуле для силы Магнуса при больших числах Рейнольдса // Моделирование в механике. 1992. Т. 6(23), № 4. С. 150—156.

11. *Oesterle B., Bui Dinh T.* Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate Reynolds numbers // Experiments in Fluids. 1998. Vol. 25. P. 16 – 22.

12. Ревизников Д.Л., Способин А.В. Алгоритмы прямого численного моделирования динамики дисперсной фазы при обтекании тела запыленным потоком // Труды МАИ. М., 2007. Вып. 26.

13. *Yóu Zhǎng Fú, Qí Hǎi Yīng, Xú Xù Cháng*. Study on particle phase flow problem by force. URL: http://www.efluid.com.cn/soft/soft_detail.aspx?id=3077#.

14. *Lukerchenko N., Kvurt Y., Kharlamov A. et al.* Experimental evaluation of the drag force and drag torque acting on a rotating spherical particle moving in fluid // J. Hydrol. Hydromech., 2008. Vol. 56, № 2. P. 88–94.

15. *Sommerfeld M*. Modelling of particle/wall collisions in confined gas-particle flows // Int. Journal of Multiphase Flow. 1992. Vol. 18. P. 905–926.

16. Великанов Н.Л., Корягин С.И. Проблемы эксплуатации и ремонта металлических и железобетонных конструкций. Калининград, 2015.

Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Калининград.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

About the authors

Prof. Nikolay Velikanov — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad. E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov — Kaliningrad state technical university, Kaliningrad. E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad. E-mail: SKoryagin@kantiana.ru